PROCEDURA ITERATIVĂ PENTRU DETERMINAREA SOLUȚIEI APROXIMATIVE PENTRU MIȘCAREA UNUI PENDUL SIMPLU

1. Introducere

Metodele de perturbare sunt un fel de instrumente puternice pentru tratarea problemelor slab neliniare, dar ele sunt mai puțin eficiente pentru a analiza probleme puternic neliniare. Dar, ca şi alte tehnici asimptotice neliniare, metodele de perturbare au propriile limite: aproape toate metodele se bazează pe o astfel de ipoteză, într-o ecuație trebuie să existe un parametru mic. Această presupunere aşa numitul parametru mic care limitează foarte mult aplicațiile tehnicilor de perturbare, după cum se ştie, o majoritate covârşitoare de probleme neliniare, în special a celor care au o neliniaritate puternică, nu au niciun parametru mic.

Există unele abordări analitice asimptotice alternative, cum ar fi metoda neperturbată, îngreunând metoda liniarizării, metoda de analiză homotopică, metoda de descompunere Adomian, metoda Lindstedt-Poincare modificată, metode de perturbare interpolară. Există de asemenea o mare parte a literaturii de specialitate care se ocupă cu găsirea unor soluții aproximative pentru ecuații neliniare cu diverse metode diferite. Este foarte dificilă rezolvarea problemelor neliniare fie şi numai teoretic. Acest lucru este posibil datorită faptului că diferite metode discreditate sau simulări numerice folosesc tehnici iterative pentru a găsi soluția lor numerică pentru problemele neliniare şi aproape toate metodele iterative sunt sensibile la soluția inițială.

În această lucrare ne propunem o tehnică de perturbare prin combinarea metodei iterative a lui He într-o nouă metodă iterativă de perturbare. Soluțiile obținute prin această metodă sunt într-un acord destul de bun cu cele obținute prin metoda exactă sau prin alte metode.

2. Metoda de analiză

Considerăm următoarele, în general oscilație neliniară:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = f(u), u(0) = A, \dot{u}(0) = 0 \tag{1}$$

Vom rescrie ecuația (1) în forma următoare:

$$\ddot{u} + \Omega^2 u = u\left(\Omega^2 - \omega^2 + \frac{f(u)}{u}\right) = ug(u) \tag{2}$$

unde Ω este o priori frecvență necunoscută a soluției periodice, fiind căutat $u(t)$. Schema iterativă propusă este:

$$\ddot{u}_{n+1} + \Omega^2 u_{n+1} = u_{n-1}[g(u_{n-1}) + g_u(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})], \mathrm{n} = 0,1,2,3, \ldots$$

(3)

unde intrările pentru pornirea funcției sunt:

$$u_{-1}(t) = u_0(t) = A cos\Omega t$$

(4)

În continuare este necesar ca pentru fiecare *n*, soluția ecuației (3), să satisfacă condițiile inițiale

$$u_n(0) = A, \dot{u}_n(0) = 0, n = 1,2,3, \ldots$$

(5)

Partea dreaptă a ecuației (5) poate fi extinsă în următoarele serii Fourier:

$$u|_{n-1}[g(u_{n-1}) + g_u(u_{n-1})] = a_1(A,\Omega,\omega)cos\Omega t + b_1(A,\Omega,\omega)sin\Omega t + \sum_{n=2}^{N} a_n(A,\Omega,\omega)cosn\Omega t + \sum_{n=2}^{N} b_n(A,\Omega,\omega)sinn\Omega t$$

(6)

unde coeficienții a_n şi b_n sunt cunoscuți, şi *N* depinde de funcția *g(u)* pe partea dreaptă a ecuației (2). În ecuația (6), este nevoie să punem condiția să nu existe termeni seculari

$$a_1(A,\Omega,\omega) = 0, b_1(A,\Omega,\omega) = 0$$

(7)

Soluția ecuației (3) cu condițiile inițiale (5) este luată pentru:

$$u_{n+1}(t) = A cos\Omega t + \sum_{n=2}^{N} \frac{a_n(A,\Omega,\omega)}{(n^2-1)\Omega^2}(cos\Omega t - cosn\Omega t) + \sum_{n=2}^{N} \frac{b_n(A,\Omega,\omega)}{(n^2-1)\Omega^2}(nsin\Omega t - sinn\Omega t)$$

(8)

Ecuația (7) permite determinarea frecvenței Ω a funcției *A* şi ω. Această procedură poate fi efectuată la orice iterație *n* dorită. Reprezentarea analitică aproximativă excelentă

pentru soluția exactă, valabilă atât pentru valori mici, cât şi mari ale amplitudinii oscilației obținute.

3. Mişcarea unui pendul simplu

Când amortizarea este neglijată, ecuația diferențială care descrie oscilația liberă a pendulului matematic este dată de

$$ml\ddot{\theta} + mg\,sin\theta = 0 \tag{9}$$

sau

$$\ddot{\theta} + a\,sin\theta = 0 \tag{10}$$

unde m este masa, l lungimea pendulului, g accelerația gravitațională şi $a = \frac{g}{l}$. Unghiul θ reprezintă abaterea de la poziția de echilibru vertical.

Rescriem ecuația (10) în forma

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = \theta\left(\Omega^2 - a\frac{sin\theta}{\theta}\right) \tag{11}$$

unde Ω este o frecvență necunoscută a soluției periodice. Aici condițiile inițiale sunt $\theta(0) = A$, $\dot{\theta}(0) = 0$, intrările pentru pornirea funcției sunt $\theta_{-1}(t) = \theta_0(t) = A\,cos\Omega t$ şi $g(\theta) = \Omega^2 - a\,\frac{sin\theta}{\theta}$. Prima iterație este dată de ecuația:

$$\ddot{\theta}_1 + \Omega^2\theta_1 = \Omega^2 A\,cos\Omega t - a\,\sin\,(A\,cos\Omega t) \tag{12}$$

Termenul $\sin\,(A\,cos\Omega t)$ poate fi extinsă în serii de puteri:

$$\sin(A\,cos\Omega t) = A\,cos\Omega t - \frac{A^3cos^3\Omega t}{3!} + \frac{A^5cos^5\Omega t}{5!} - \frac{A^7cos^7\Omega t}{7!} + \frac{A^9cos^9\Omega t}{9!} + \cdots \tag{13}$$

Rescriem puterile lui $cos\Omega t$ în (13) în ceea ce priveşte multiplii lui Ωt cu ajutorul identității

$$cos^{2n+1}\Omega t = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n-k}\cos\,(2k+1)\,\Omega t$$

(14)

unde

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}, \binom{n}{0} = 1$$

Folosind (14), ecuația (13) poate fi exprimată în forma

$$\begin{aligned}\sin(A\cos\Omega t) = {} & A\cos\Omega t - \frac{A^3}{24}(\cos 3\Omega t + 3\cos\Omega t) \\ & + \frac{A^5}{1920}(\cos 5\Omega t + 5\cos 3\Omega t + 10\cos\Omega t) \\ & - \frac{A^7}{322560}(\cos 7\Omega t + 7\cos 5\Omega t + 21\cos 3\Omega t + 35\cos\Omega t) \\ & + \frac{A^9}{92897280}(\cos 9\Omega t + 9\cos 7\Omega t + 36\cos 5\Omega t + 84\cos 3\Omega t + 126\cos\Omega t)\end{aligned}$$

(15)

Substituind (15) în (12), aceasta poate fi rescrisă ca:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 + \Omega^2\theta_1 = {} & \left[A\Omega^2 - a\left(A - \frac{A^3}{8} + \frac{A^5}{192} - \frac{A^7}{9216} + \frac{A^9}{737280} + \cdots\right)\right]\cos\Omega t - \frac{A^3}{24}\cos 3\Omega t \\ & + \frac{A^5}{1920}(\cos 5\Omega t + 5\cos\Omega t) - \frac{A^7}{322560}(\cos 7\Omega t + 7\cos 5\Omega t + 21\cos 3\Omega t) \\ & + \frac{A^9}{92897280}(\cos 9\Omega t + 9\cos 7\Omega t + 36\cos 5\Omega t + 84\cos 3\Omega t) + \cdots\end{aligned}$$

(16)

Se impune condiția să nu existe termeni seculari în θ_1

$$\Omega_1^2 = a\left(1 - \frac{A^2}{8} + \frac{A^4}{192} - \frac{A^6}{9216} + \frac{A^8}{737280} + \cdots\right)$$

(17)

şi rezolvând (16) cu condițiile inițiale $\theta_1(0) = A$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, obținem

$$\theta_1(t) = A\cos\Omega_1 t + \frac{A^3}{192\Omega_1^2}(\cos 3\Omega_1 t + \cos\Omega_1 t) - \frac{A^5}{46080\Omega_1^2}(\cos 5\Omega_1 t + \cos\Omega_1 t)$$
$$- \frac{A^5}{3072\Omega_1^2}(\cos 3\Omega_1 t + \cos\Omega_1 t) + \frac{A^7}{15482880\Omega_1^2}(\cos 37t + \cos\Omega_1 t)$$
$$+ \frac{A^7}{1105920\Omega_1^2}(\cos 5\Omega_1 t + \cos\Omega_1 t) + \frac{A^7}{122880\Omega_1^2}(\cos 3\Omega_1 t + \cos\Omega_1 t)$$
$$- \frac{A^9}{7431782400\Omega_1^2}(\cos 9\Omega_1 t + \cos\Omega_1 t)$$
$$- \frac{A^9}{495452160\Omega_1^2}(\cos 7\Omega_1 t + \cos\Omega_1 t) - \frac{A^9}{61931520\Omega_1^2}(\cos 5\Omega_1 t + \cos\Omega_1 t)$$
$$- \frac{A^9}{8847360\Omega_1^2}(\cos 3\Omega_1 t + \cos\Omega_1 t)$$

(18)

sau

$$\theta_1(t) = \left(A - \frac{A^3}{192\Omega_1^2} + \frac{A^5}{2880\Omega_1^2} - \frac{141A^7}{15482880\Omega_1^2} + \frac{61A^9}{464486400\Omega_1^2}\right)\cos\Omega_1 t$$
$$+ \left(\frac{A^3}{192\Omega_1^2} - \frac{A^5}{3072\Omega_1^2} + \frac{A^7}{122880\Omega_1^2} - \frac{A^9}{8847360\Omega_1^2}\right)\cos 3\Omega_1 t$$
$$+ \left(-\frac{A^5}{46080\Omega_1^2} + \frac{A^7}{1105920\Omega_1^2} - \frac{A^9}{61931520\Omega_1^2}\right)\cos 5\Omega_1 t$$
$$+ \left(\frac{A^7}{15482880\Omega_1^2} - \frac{A^9}{495452160\Omega_1^2}\right)\cos 7\Omega_1 t - \frac{A^9}{7431782400\Omega_1^2}\cos 9\Omega_1 t$$

(19)

Perioada aproximativă poate fi exprimată de ecuația (17): $T_{aprox} = \frac{2\pi}{\Omega_1}$ şi obținem:

$$T_{aprox} = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}\left(1 + \frac{A^2}{16} + \frac{5A^4}{1536} + \frac{13A^6}{73728} + \frac{239A^8}{23592960} + \cdots\right)$$

(20)

în timp ce perioada exactă este:

$$T_{ex} = \frac{4}{\sqrt{a}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, k = \sin\frac{A}{2}$$

(21)

Pentru compararea cu perioada exactă, avem Tabelul 1:

A	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{T_{aprox}}{T_{ex}}$	0.99999681	0.99999512	0,99999211	0,99976763	0,99961425	0,99951134	0,99830347

Tabelul 1: Comparația dintre perioada aproximativă T_{aprox} dată de (24) şi soluția exactă T_{ex} dată de (25)

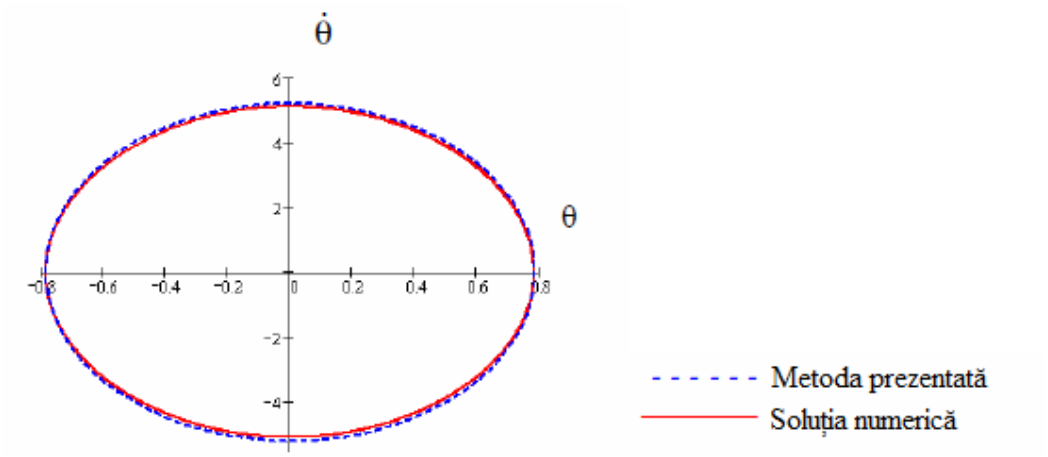

Fig. 1. Ciclurile limită ale ecuației (19):
□=100, $A = \pi/4$

Figura 1 prezintă o comparație între soluția prezentată obținută din formulele (17) şi (19) şi integrarea rezultatelor numerice obținute prin utilizarea metodei Runge-Kutta de ordinul patru.

4. Concluzii

Metoda propusă este eficientă şi are unele avantaje distincte față de metodele uzuale de aproximare, adică soluția aproximativă obținută în lucrarea de față este valabilă atât pentru oscilații slab neliniare, cât şi pentru cele puternic neliniare.